Cap 8 - notas reorganizadas

- Seguem uma ordem que me parecem mais lógica: 1° parênteses de Poisson, depois introduzindo trans. canônicas diretamente em termos de um novo Hamiltoniano.
- Abordagem inspirada na apresentação em José e Saletan, cap. 5
- Evitam perder tempo com conceitos desnecessários, como parênteses de Lagrange

8.3 Notação Simplética

É possível introduzir uma notação compacta que resume todas as equações de Hamilton numa única equação matricial. Essa notação é particularmente útil para simplificar certas fórmulas e demonstrações que na notação tradicional são bastante complicadas. Seja $\mathbf{z}$ uma matriz-coluna com $2n$ elementos $z_1, \ldots, z_{2n}$, definidos por

$$z_i = q_i \quad , \quad z_{n+i} = p_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n \; . \tag{8.3.1}$$

Em palavras: os n primeiros zs são os n qs e os n últimos zs são os n ps. Analogamente, a matriz $\partial H/\partial \mathbf{z}$ é uma coluna com os seguintes elementos:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}\right)_{n+i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \; . \tag{8.3.2}$$

Seja, finalmente, $\mathbf{J}$ a matriz $(2n) \times (2n)$ definida por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & I \\ -I & \mathbf{O} \end{pmatrix} \tag{8.3.3}$$

obs: José e Saletan usam $\Omega = J^T$, ie $\Omega \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial z}$

onde $\mathbf{O}$ é a matriz $n \times n$ com todos os elementos nulos e I é a matriz identidade $n \times n$. As equações de Hamilton (7.1.9) podem ser expressas sucintamente como

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \; , \tag{8.3.4}$$

conhecida como *forma simplética*[1] das equações de Hamilton.

■ **Exercício 8.3.1.** Mostre que (8.3.4) equivale às equações de Hamilton na forma usual. ■

A matriz $\mathbf{J}$ possui as seguintes propriedades, cuja verificação é deixada a cargo do leitor:

(1) $\mathbf{J}^2 = -I$, onde I é a matriz identidade $(2n) \times (2n)$;
(2) $\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{J}^T = I \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ ($\mathbf{J}$ é uma matriz ortogonal);
(3) $\det \mathbf{J} = 1$.

Parênteses de Poisson

Considere uma função escalar arbitrária ("variável dinâmica") $F(q,p,t)$.

Combinando a regra da cadeia com as eqs. de Hamilton, temos:

$$\frac{dF(q,p,t)}{dt} = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Isto sugere a introdução da seguinte operação matemática:

def: Parênteses (ou colchete) de Poisson de duas vars. dinâmicas F, G:

$$\{F,G\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{z}}\right)^T J \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{z}}\right) \qquad \left[\vec{z} = (q,p)\right]$$

Em termos desta notação:

$$\frac{dF(q,p,t)}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Em particular, as próprias eqs de Hamilton ficam:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \;;\; \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Exemplos:

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad ; \quad \{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Em particular ["parêntes fundamentais" satisfeitos por variáveis canônicas]:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad ; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = -\{p_j, q_i\}$$

obs: usando a notação simplética, podemos resumir todos os parênteses canônicos na forma:

$$\{z_r, z_s\} = J_{rs}$$

E, mais geralmente:

$$\{z_r, f\} = \sum_s J_{rs} \frac{\partial f}{\partial z_s}$$

Mais exemplos

$$\{q^2, p^2\} = 2q \cdot 2p - 0 = 4qp \quad ; \quad \{q^2, qp\} = 2q \cdot q - 0 \cdot p = 2q^2$$

$$\{q_1 q_2, q_1 p_2 p_1\} = q_2 \cdot q_1 p_2 - 0 \cdot p_1 p_2 + q_1 \cdot q_1 p_1 - 0 \cdot 0 = q_1 (q_2 p_2 + q_1 p_1)$$

Propriedades Algébricas dos parênteses de Poisson

i) $\{A,B\} = -\{B,A\} \Rightarrow \{A,A\}=0$ [anti simetria]

ii) $\{A+\alpha B, C\} = \{A,C\} + \alpha\{B,C\}$, α indep de (q,p) [(bi) linearidade]

iii) $\{A, BC\} = \{A,B\}C + B\{A,C\}$ $\left(\overset{(i)}{\Longleftrightarrow} \{AB,C\} = A\{B,C\} + \{A,C\}B \right)$

[O operador $\{A, \cdot\}$ obedece a uma "regra do produto" análoga à de derivadas]

iv) $\frac{\partial}{\partial\lambda}\{A,B\} = \left\{\frac{\partial A}{\partial\lambda}, B\right\} + \left\{A, \frac{\partial B}{\partial\lambda}\right\}$, onde λ é um parâmetro qualquer

v) Identid. de Jacobi: $\{\{A,B\},C\} + \{\{B,C\},A\} + \{\{C,A\},B\} = 0$

[Funções C^∞ no esp. de ~~fase~~ fase formam uma álgebra de Lie]

As propriedades i-iv têm demonstração imediata. A (v) requer trabalho braçal p/ provar diretamente, veremos adiante outra dem. mais rápida.
Podemos usar essas props para calcular parênteses sem recorrer à def. inicial

ex: $\{q^2, p^2\} = 2q\{q,p^2\} = 4qp\overset{1}{\cancel{\{q,p\}}} = 4qp$

$\{q^2, qp\} = 2q\{q,qp\} = 2q^2\overset{1}{\cancel{\{q,p\}}} + 2qp\overset{0}{\cancel{\{q,q\}}} = 2q^2$

Parênteses de Poisson e dinâmica Hamiltoniana [José e Saletan, cap 5.]

obs: este material não aparece
no livro do Nivaldo.

Os parêntes de Poisson estão intimamente ligados à dinâmica Hamiltoniana. Para entender por que, considere 1º o seguinte exemplo de um sistema dinâmico [sistema de eqs. diferenciais envolvendo q's e p's]:

$$\dot q = qp \quad ; \quad \dot p = -qp$$

Não é difícil resolver este sistema:

$$\dot q + \dot p = 0 \rightarrow q + p = C = cte \rightarrow \dot q = q(C-q)$$

Def: $W = \dfrac{e^{ct}}{q}$; $\dfrac{dW}{dt} = CW - \dfrac{W}{q}\dot q = \cancel{CW} - \dfrac{W}{\cancel{q}}\left[\cancel{q}(\cancel{C}-q)\right] = qW = e^{ct}$

$$\therefore \frac{e^{ct}}{q} = W = \frac{e^{ct}}{C} + K \rightarrow e^{-ct}q = \frac{C}{e^{ct}+K}$$

$$\rightarrow \boxed{q = \frac{Ce^{ct}}{e^{ct}+K}} \quad \text{e} \quad \boxed{p = C - q = \frac{CK}{e^{ct}+K}}$$

(obs: $p(0) = \dfrac{CK}{1+K}$; $q(0) = \dfrac{C}{1+K}$ $\rightarrow K = p(0)/q(0) \Rightarrow C = q(0) + p(0)$)

Este sistema parece, portanto, perfeitamente normal do ponto de vista matemático. Porém, ele não pode representar as eqs. de movimento de um sistema físico Hamiltoniano!

É fácil ver por que: para satisfazer às eqs. de Hamilton, seria necessário existir um Hamiltoniano $H(q,p,t)$ tal que

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = qp \quad , \quad e \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -qp$$

Mas aí $\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = p \neq \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = q$!! $\rightarrow$ IMPOSSÍVEL

Uma propriedade crucial dos parênteses de Poisson é que eles permitem diferenciar os sistemas dinâmicos que são de fato Hamiltonianos. Vamos demonstrar o seguinte resultado

Teorema: um sistema dinâmico da forma $\dot{z}_i = f_i(z,t)$ Lembrando $[z = (q,p)]$ é Hamiltoniano se e só se, dadas quaisquer variáveis dinâmicas $F(z,t)$, $G(z,t)$, valer a "regra do produto"

$$\frac{d}{dt}\{F,G\} = \left\{\frac{dF}{dt}, G\right\} + \left\{F, \frac{dG}{dt}\right\}$$

Obs: notar que, ao contrário da propriedade (iv) acima, aqui tomamos derivadas <u>totais</u> com respeito a t.

Antes de demonstrar, vamos aplicar o teorema ao exemplo acima

escolhendo $F = q$, $G = p$: sabemos que $\{q,p\} = 1 \longrightarrow \frac{d}{dt}\{q,p\} = 0$

Porém $\{\dot{q}, p\} + \{q, \dot{p}\} = \{qp, p\} + \{q, -qp\} = p - q \neq 0 \rightarrow$ sist. ñ Hamilt.

<u>Demonstração</u>: suponha 1º que o sistema é, de fato, Hamiltoniano.

Então

$$\frac{d}{dt}\{F,G\} = \{\{F,G\},H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} \qquad \text{[Pelas eqs. de Hamilton]}$$

$$= \{F,\{G,H\}\} + \{\{F,H\},G\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} \qquad \text{[Ident. de Jacobi]}$$

$$= \left\{F, \frac{dG}{dt}\right\} - \cancel{\left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\}} + \left\{\frac{dF}{dt}, G\right\} - \cancel{\left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\}} + \cancel{\left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\}} + \cancel{\left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\}} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Eq. de Hamilton} \\ \text{e (v)}\end{array}\right]$$

$$= \left\{F, \frac{dG}{dt}\right\} + \left\{\frac{dF}{dt}, G\right\}$$

Conversamente, suponha que a identidade seja satisfeita p/ qualquer par de variáveis dinâmicas. Em particular, então, isso vale p/ qualquer par $F = z_r$ $G = z_s$. Como $\{z_r, z_s\} = J_{rs}$ é indep. de t, então

$$0 = \frac{d}{dt}\{z_r, z_s\} = \left\{z_r, \frac{dz_s}{dt}\right\} + \left\{\frac{dz_r}{dt}, z_s\right\} = \{z_r, f_s(z,t)\} + \{f_r(z,t), z_s\}$$

Usando a relação $\{z_r\ F\} = \sum_j J_{rj} \frac{\partial F}{\partial z_j}$: $\quad 0 = \sum_j \left[J_{rj} \frac{\partial f_s}{\partial z_j} - J_{sj} \frac{\partial f_r}{\partial z_j}\right]$

Multiplicando os dois lados por $J_{rp} J_{s\ell}$ e somando em r, s:

$$0 = \sum_{jrs} J_{rp} J_{s\ell} \left[J_{rj} \frac{\partial f_s}{\partial z_j} - J_{sj} \frac{\partial f_r}{\partial z_j}\right]$$

$$= \sum_{sj} J_{s\ell}\, \delta_{pj} \frac{\partial f_s}{\partial z_j} - \sum_{rj} J_{rp}\, \delta_{\ell j} \frac{\partial f_r}{\partial z_j} \qquad \left(\overset{\text{usando}}{\sum_r J_{rp} J_{rj}} = (J^T J)_{pj} = I_{pj} = \delta_{pj}\right)$$

$$= \sum_s J_{s\ell} \frac{\partial f_s}{\partial z_p} - J_{sp} \frac{\partial f_s}{\partial z_\ell} \qquad (\text{trocando } r \to s \text{ na 2ª soma})$$

$$= \frac{\partial K_\ell}{\partial z_p} - \frac{\partial K_p}{\partial z_\ell} \qquad , \text{onde } K_\ell := \sum_s J_{s\ell} f_s$$

Recorde agora, do cálculo de várias variáveis (teorema da função implícita), que dado um conjunto de n funções $K_j(z,t)$, existe[(*)] uma "função-mãe" $H(z,t)$ tal que cada $K_j = \frac{\partial H}{\partial z_j}$ se e só se $\frac{\partial K_\ell}{\partial z_p} = \frac{\partial K_p}{\partial z_\ell}$ (isto garante que as segundas derivadas são independentes da ordem da derivação).

Como acabamos de chegar justamente a essa condição, podemos concluir que $\exists$ $H(z,t)$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial z_j} = K_j = \sum_s J_{sj} f_s = \sum_s J_{sj} \dot{z}_s = J^T_{js} \dot{z}_s \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{z}} = J \frac{\partial H}{\partial \vec{z}}}$$

$\therefore$ as equações deste sistema dinâmico correspondem a eqs. de Hamilton com Hamiltoniana H!

(*) Mais tecnicamente, o teorema garante que existe um $H(z,t)$ válido localmente, ie, na vizinhança de um dado ponto z. Concebivelmente, pode não existir uma única função $H(z,t)$ válida em todo o domínio de z. Na prática, é difícil isso ocorrer.